



Ministerio de
Educación

Gobierno de Chile

Guía de Aprendizaje N° 6

AZAR Y PROBABILIDAD

Educación Matemática

Segundo nivel o ciclo de Educación Media

Educación para Personas Jóvenes y Adultas





Guía de Aprendizaje N° 6

AZAR Y PROBABILIDAD

Educación Matemática

Segundo nivel o ciclo de Educación Media

Educación para Personas Jóvenes y Adultas

© Ministerio de Educación
Avda. Bernardo O'Higgins 1371, Santiago de Chile

Guía de Aprendizaje N°6

AZAR Y PROBABILIDAD

Segundo Nivel o Ciclo de Educación Media

Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Inscripción N° 236.042

Autores:

Mauricio Huircan Cabrera
Katherina Carmona Valdés

Colaboradores:

Nicolás de Rosas Cisterna, Rosita Garrido Labbé,
María Angélica Contreras Fernando, Pablo Canales Arenas y Carolina Marambio Cárcamo,
Walter Roberto Valdivieso Sepúlveda, Manuel Ernesto Urzúa Bouffanais.

Edición:

Jose Luis Moncada Campos
Pilar Saavedra Fernández

Revisión pedagógica:

Carla Falcón Simonelli

Coordinación Nacional de Educación para Personas Jóvenes y Adultas
División de Educación General

Reimpresión por A Impresores, año 2019

Iconografía



Información



Atención



Tips



Página Web



Actividad



Actividad en el cuaderno



Evaluación



Presentación

La “estadística y probabilidad”, pasó de ser una rama de las matemáticas como la mayoría de la gente piensa, a ser una ciencia pura y aplicada, que crea, desarrolla y aplicada, técnicas para poder determinar información de una población o inferir conclusiones sobre esta. Para algunos, la estadística es considerada como una ciencia y un arte. Ciencia, porque utiliza el método científico, y arte, porque busca comprender y proyectar una realidad muchas veces copiosa y diversa, sintetizándola en cuadros, gráficos y aun modelos predictivos, que han de cautivar al público, despertar su interés y llevarle a reflexionar.

El material que la Coordinación Nacional de Educación para Personas Jóvenes y Adultas del Ministerio de Educación (Mineduc) pone a su disposición, contiene herramientas para responder a las necesidades que tienen las personas adultas en su vida diaria, en el ámbito laboral y social, para la comprensión de la información entregada por los medios de información y que utilizan el lenguaje de las probabilidades y estadística.

El material presentado, desarrolla dos guías de trabajo: en la primera se tratan algunas **técnicas de conteo**, herramientas fundamentales para conocer el número de elementos de conjuntos que tienen una gran cantidad de elementos cuyo recuento sería muy demoroso sin estas habilidades, y que, de modo aun más importante, se orientan hacia el **cálculo de probabilidades** por lo que en esta parte, se introducen los **conceptos básicos de Probabilidad**. En la segunda guía, se avanza al tratamiento de la **Probabilidad Condicional**, es decir, al estudio de la oportunidad o chance de ocurrencia de sucesos que presuponen la ocurrencia de otros sucesos que pueden afectar la posibilidad de su realización.

Lo invitamos a trabajar en esta guía para aprender estas estrategias, hacerlas parte de su vida y así tener una perspectiva para comprender y enfrentar situaciones de incertidumbre.

Guía de trabajo N° 1

Técnicas de Conteo

¿Cuántas tenidas de una polera y un pantalón puedo ponerme para salir esta tarde?



Contenidos

- Principio multiplicativo y recursos visuales para contar.
- Factoriales y Permutaciones lineales sin repetición de elementos.
- Variaciones.
- Combinaciones.
- Conceptos básicos de probabilidades.

APRENDAMOS A CONTAR: EL PRINCIPIO MULTIPLICATIVO

Para contar de manera eficiente en una variedad de situaciones, es necesario conocer una regla fundamental conocida como principio multiplicativo:

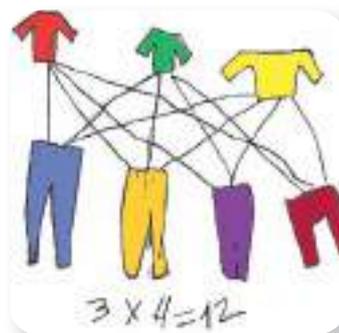


PRINCIPIO MULTIPLICATIVO

Si un procedimiento puede realizarse de n formas distintas y por cada una de estas, un segundo procedimiento puede llevarse a cabo de m formas distintas, entonces los dos procedimientos pueden realizarse juntos de $m \cdot n$ formas distintas.

Ilustremos la aplicación de este principio con algunos ejemplos:

1) Juan está invitado a un almuerzo y se quiere vestir muy bien con parte de su ropa favorita, por lo que debe seleccionar entre 3 poleras y 4 pantalones. **¿De cuántas formas puede combinar estas partes de su vestimenta?**



Solución:

- Para seleccionar la polera que vestirá; lo puede hacer de 3 formas.
- Para seleccionar el pantalón que vestirá; lo puede hacer de 4 formas.

Por lo tanto, para combinar estas partes de su vestimenta, lo puede hacer de: $3 \cdot 4 = 12$

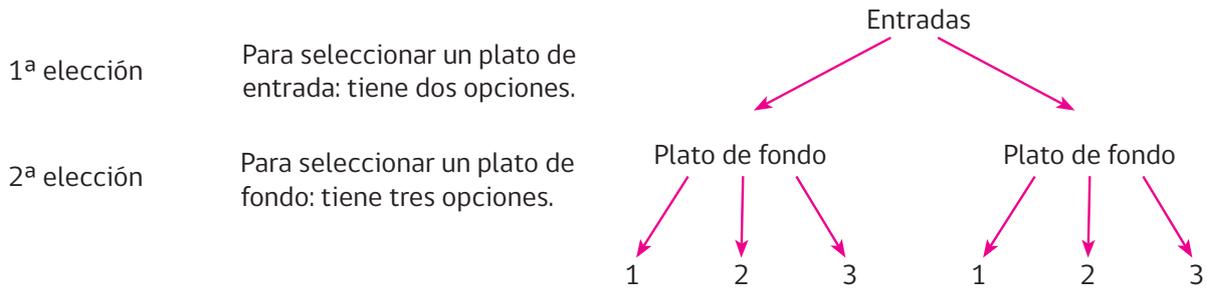
En la figura puede observarse la ilustración de una técnica coordinatoria para solucionar este sencillo problema: a partir de cada polera (3) se han trazado líneas hacia cada uno de los pantalones, de modo que desde cada polera "salen" cuatro líneas, una hacia cada pantalón. Entonces si cada una de tres poleras se combina con 4 pantalones, ello dará lugar a 12 tenidas.

2) Marcela almuerza en el casino de su trabajo de lunes a viernes, y siempre hay dos variedades de entradas y tres variedades de plato de fondo. **¿Cuántos menús distintos puede escoger?**



Solución:

En situaciones como estas es muy útil dibujar un diagrama llamado: "Diagrama de árbol" que consiste en ir combinando cada uno de los eventos o sucesos por etapa o vez:



Al contar las ramas de la segunda elección, se cuentan cuántos posibles menús hay. En este caso se aprecian seis: $6 = 2 \cdot 3$

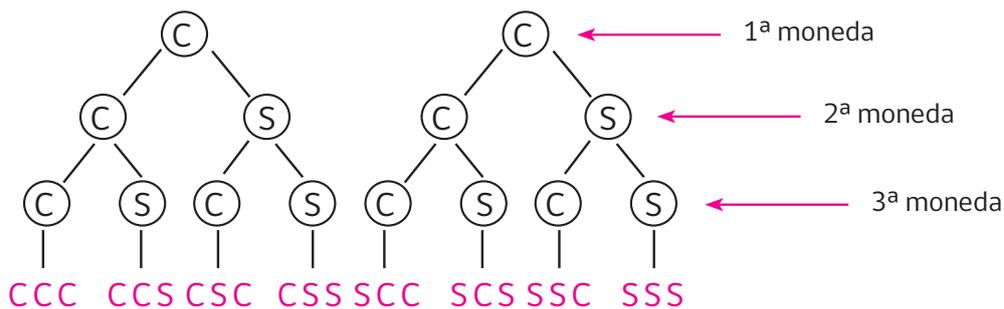
Al aplicar directamente el principio multiplicativo, la solución es la siguiente:

Para seleccionar la entrada hay 2 posibilidades;
 Para seleccionar el plato de fondo hay 3 posibilidades.
 Entonces hay $2 \cdot 3 = 6$ posibilidades de seleccionar el menú.

3) Si se lanzan al aire tres monedas. **¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener?**



Solución:



El resultado de lanzar las tres monedas al aire, se pueden obtener un total de ocho resultados posibles.

De igual modo, aplicando el principio multiplicativo resulta que:

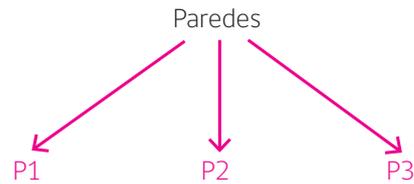
Al lanzar la primera moneda hay dos resultados posibles;
 Al lanzar la segunda moneda hay dos resultados posibles;
 Al lanzar la tercera moneda hay dos resultados posibles.
 Entonces al lanzar las tres moneda hay $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ resultados posibles;

4) Un constructor propone a la empresa que pueden construir las paredes de una casa con tres tipo de ladrillo (fiscal, princesa o King Kong 18); dos mezclas para los bolones de los cimientos (cemento o concreto armado); y con dos tipos de planchas para el techo (Zinc Alum o tejas asfálticas) **¿Cuántas elecciones posibles de materiales se pueden hacer?**



Solución:

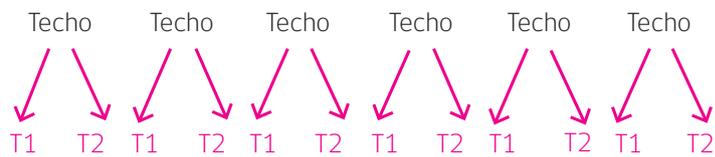
1ª elección Para seleccionar el material para las paredes: tiene tres opciones



2ª elección Para seleccionar el material para los cimientos: tiene dos opciones



3ª elección Para seleccionar el material para el techo: tiene dos opciones



Al contar las ramas de la tercera elección, se cuentan cuántas las elecciones posibles que hay de los materiales para la casa. En este caso se aprecian doce.

Al aplicar directamente el principio multiplicativo se obtiene que:

Hay 3 opciones para material de paredes; 2 opciones para completar la mezcla de los bolones para los cimientos y, finalmente, 2 opciones de material para el techo. Por lo tanto hay $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ posibilidades diferentes de escoger los materiales que se han citado para aplicarlos a la construcción de la casa.



Actividad en el cuaderno

- Escriba todas las posibilidades que consideren un tipo de ladrillo, un complemento de mezcla y un material de techo para construir la casa.
- Escriba todas las posibilidades en que la casa tiene en su construcción ladrillo princesa.
- Escriba todas las posibilidades que consideren ladrillo fiscal y en los cimientos concreto armado para la construcción de la casa.
- Escriba todas las posibilidades en que la casa construida tiene ladrillos King Kong 18 o tejas asfálticas.

5) Un curso de 45 alumnos está conformado por 20 muchachos y 25 muchachas, y elegirán por votación a la directiva, conformada por: Presidente(a), vicepresidente(a), tesorero(a), secretario(a). Si el curso decide que una muchacha servirá la tesorería, un muchacho va a servir la secretaría y que nadie puede tener más de un cargo. **¿De cuántas maneras pueden elegir un(a) presidente(a), un(a) vicepresidente(a), una tesorera y un secretario?**



Solución:

- La elección de la tesorera puede ocurrir de 25 formas, pues puede ser cualquiera de las 25 muchachas.
- La elección del secretario puede ocurrir de 20 formas, pues puede ser cualquiera de los 20 muchachos.
- La elección del(la) presidente(a) puede hacerse de 43 formas, porque ya han sido seleccionados dos alumnos de los 45.
- La elección del(la) vicepresidente(a) puede hacerse de 42 formas, porque ya han sido seleccionados tres alumnos de los 45.

Por lo tanto la elección de la directiva puede hacerse de: $25 \cdot 20 \cdot 43 \cdot 42 = 903.000$ formas distintas.

6) **¿De cuántas maneras pueden repartirse 3 premios entre un conjunto de 10 personas, suponiendo que cada persona no puede obtener más de un premio?**



Solución:

Aplicando el principio fundamental del conteo:

Tenemos 10 personas que pueden recibir el primer premio. Una vez que éste ha sido entregado, entre 9 personas se puede entregar el segundo premio, y luego, entre 8 personas se puede entregar el tercer premio. Por lo tanto el número de maneras distintas de repartir los tres premios está dado por: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

7) **¿Cuántas placas patentes de automóvil se pueden hacer utilizando cuatro letras diferentes seguidas de dos dígitos diferentes? No se admiten repeticiones. (Se disponen de 26 letras).**



Solución:

Aplicando el principio fundamental del conteo:

- Tenemos 10 dígitos de los cuales debemos seleccionar dos. (dígitos: 0-1-2-3-4-5-6-7-8-9)
- Por lo tanto el número de maneras distintas de escribir placas patentes sin permitir la repetición de letras ni dígitos es: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 9 = 32.292.000$



Actividad en el cuaderno

1) ¿Cuántos números pares de dos dígitos pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 9, si cada uno de ellos puede utilizarse solo una vez?



2) Un egresado de Técnico eléctrico, debe efectuar una práctica de campo en la empresa SELECTRA, de lunes a jueves durante cinco horas seguidas cada día. Puede elegir la hora de ingreso diario a la empresa por la totalidad de la práctica, a las 08:00 hrs o a las 12:00 o las 16:00 hrs. También puede elegir para la totalidad de su período de práctica, la sección donde la va a realizar, Producción eléctrica o Distribución eléctrica. Determinar el número de posibilidades de entrada y sección que tiene el egresado para hacer su práctica.



3) En un estudio médico los pacientes se clasifican de acuerdo a su grupo sanguíneo en ocho formas diferentes: AB+, AB-, A+, A-, B+, B-, O+, O-, y su presión sanguínea en: baja, normal o alta. Determinar el número de formas posibles de clasificar un paciente.



4) ¿Cuántos números telefónicos de siete dígitos es posible hacer, considerando que el cero no puede ir al inicio de los números y que no es posible repetir dígitos?



5) ¿Cuántos de los números telefónicos anteriores empiezan por el número siete?

6) ¿Cuántos de los números telefónicos anteriores terminan en un número impar?



Actividad en el cuaderno

7) Patricia es invitada a un recital de su artista favorito, por lo que debe seleccionar la ropa que vestirá entre: cinco chalecos, tres jeans y dos chaquetas, el calzado lo elegirá entre un par de zapatillas o un par de botines.

¿De cuántas formas puede seleccionar las prendas de ropa que usará?



8) El maestro sanguchero del "Café del Rey", puede hacer un sándwich especiales con uno de estos insumos: pan frica, pan de molde, pan bagel, pan italiano y pan amasado y para el acompañamiento con las carnes, dispone de: Posta rosada, hamburguesas de cerdo, pollo, lomo de cerdo. **¿Cuántos tipos de sándwich puede ofrecer el "Café del Rey"?**



9) Antes del año 2010 las placas patentes de los vehículos constaban de dos letras y cuatro dígitos. **¿Cuántas placas patentes de automóvil se pueden hacer con esta condición?** (considere 26 letras).



10) Se tienen 6 libros diferentes: uno de aritmética (A), dos de biología(B) y tres de cálculo(C), **¿De cuántas maneras se pueden ordenar en un estante?**



FACTORIALES

El factorial de un número entero positivo n se define como el producto que se obtiene de multiplicar los números naturales desde el 1 hasta el número n .



- Definición: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$
- Notación: $n!$
- Lectura: $n!$ se lee "n factorial" o "factorial de n"
- Por definición: $0! = 1$



TIPS

El factorial de n ($n!$) es el producto de los primeros n números naturales. Además, $0! = 1$



ACTIVIDAD

Ejemplos: completa los espacios marcados con el resultado de las multiplicaciones

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$1) \frac{7!}{5!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot 6 \cdot 7}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5}} = 42$$

$$2) \frac{8!}{5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$$

$$3) \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = 5 \cdot 2 = 10$$

$$4) \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$$



Resuelve los siguientes ejercicios:

$$1) \frac{7!}{5!} =$$

$$2) \frac{15!}{(12-2)!3!} =$$

$$3) \frac{7!}{(7-2)!} =$$

$$4) \frac{5+4+3!}{2!+3!} =$$

$$5) \frac{7!+6! - 8!}{5!-3!} =$$

$$6) \frac{12!}{(12-3)!3!} =$$

$$7) \frac{17!}{(17-2)!} =$$

PERMUTACIÓN LINEAL DE n ELEMENTOS

Se llama permutación lineal de n elementos al número de filas que se puede hacer con n objetos diferentes.

Veamos un par de ejemplos:

- 1) **¿cuántos números diferentes de 4 cifras se pueden hacer con los dígitos 1, 3, 5 y 7?**

(sin repetir los dígitos)



Solución:

La cifra de las unidades de mil tiene 4 posibilidades de elección;
 La cifra de las centenas tiene 3 posibilidades de elección;
 La cifra de las decenas tiene 2 posibilidades de elección;
 Finalmente, la cifra de las unidades tiene una sola posibilidad de elección.

Entonces, de acuerdo al principio multiplicativo, la cantidad de números posibles de 4 cifras con los dígitos 1, 3, 5 y 7 es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, es decir, $4! = 24$.

En otras palabras, la cantidad de números diferentes con los 4 dígitos dados, corresponde a una permutación lineal de estos 4 dígitos que es $4! = 24$

- 2) Se tienen 6 frascos con diferentes semillas **¿De cuántas maneras se pueden ordenar en un estante?**



Solución:

El mismo razonamiento realizado en la solución a la pregunta anterior, permite establecer que la cantidad de maneras de ordenar los 6 frascos en fila en el estante, es una permutación lineal de 6 objetos, esto es $6! = 720$



Así, una permutación lineal de n elementos o sea el número de filas que se puede hacer con n objetos diferentes es $n!$. Notación: $P_n = n!$

Actividad en el cuaderno

- 1) ¿Cuántas palabras con o sin sentido se puede hacer con las letras: a, b, c?.
- 2) ¿Cuántas fotografías diferentes se pueden tomar los 7 miembros de una familia si todos deben aparecer de frente a la cámara ordenados de izquierda a derecha?
- 3) ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse diez alumnos en una fila de butacas del gimnasio?



i VARIACIÓN DE n ELEMENTOS SOBRE r ELEMENTOS Y FÓRMULA DE LAS VARIACIONES

Se llama variación de n elementos sobre r elementos al número de filas de r objetos que se pueden hacer con n objetos diferentes.



Ejemplos:

- 1) Se tienen 7 libros y solo 3 espacios en una biblioteca. **¿De cuántas maneras se pueden colocar 3 libros elegidos en los espacios disponibles?**

Solución:

Para llenar el primer espacio hay 7 libros posibles;

Para llenar el segundo espacio quedan 6 libros posibles;

Para llenar el tercer y último espacio quedan 5 libros posibles.

Entonces, de acuerdo al principio multiplicativo, hay $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ maneras posibles de colocar en un estante 3 libros escogidos de entre 7 libros. Esto corresponde a una variación de 7 objetos sobre 3 objetos. Se puede observar que el cálculo realizado corresponde a la multiplicación de 3 factores consecutivos a partir de 7 en orden decreciente.

2) ¿De cuántas maneras pueden repartirse 4 premios diferentes entre un conjunto de 10 personas, suponiendo que cada persona no puede obtener más de un premio?

Solución:

Para otorgar el primer premio hay 10 concursantes posibles;

Para otorgar el segundo premio quedan 9 concursantes posibles;

Para otorgar el tercer premio quedan 8 concursantes;

Para otorgar el cuarto y último premio quedan 7 concursantes.

Entonces, de acuerdo al principio multiplicativo, hay $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ posibilidades de otorgar los 4 premios entre las 10 personas. Esto corresponde a una variación de 10 objetos sobre 4 objetos. Se puede observar que el cálculo realizado corresponde ahora, a la multiplicación de 4 factores consecutivos a partir de 10 en orden decreciente.

Los ejemplos dados pueden resolverse con una expresión llamada fórmula de las variaciones:



Definición: Una variación de n elementos sobre r elementos, V_r^n , viene dada por la fórmula:

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Para el primer ejemplo, se calcula: $V_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$;

Para el segundo ejemplo, se calcula: $V_4^{10} = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$;

TIPS

En algunos textos y calculadoras científicas, en vez de V_r^n , se usa nV_r o P_r^n o nP_r o $P(n,r)$ para denotar una variación de n sobre r objetos a la cual también se le llama r -Permutación.



Actividad en el cuaderno

1) ¿De cuántas formas puede, el profesor de educación física, armar un equipo de basquetbol de cinco jugadores si solo nueve estudiantes saben jugar?



2) ¿Cuántas permutaciones de 3 letras pueden hacerse con las letras de la palabra CENSO?



3) ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar con los dígitos del 1 al 9?

4) En un edificio en el que viven 25 personas adultas hay que formar una comisión interna de 3 personas: un presidente, un secretario y un tesorero. ¿Cuántas comisiones se pueden formar?



5) En un mástil se pueden izar 3 banderas de diferentes colores de modo que al quedar una arriba de la otra forman una señal, si se cambia el orden de las banderas entonces se forma una señal diferente. ¿Cuántas señales puede hacerse en este mástil si hay disponibles 6 banderas de distintos colores?



TIPS

En todo problema en que la solución sea una variación (V_r^n), interesa el orden en que se escogen los objetos.

COMBINACIÓN DE n ELEMENTOS SOBRE r ELEMENTOS Y FÓRMULA DE LAS COMBINACIONES.

Se llama combinación de n elementos sobre r elementos al número de grupos de r objetos que se pueden hacer con n objetos diferentes. En este caso no interesa el orden en que se toman los r objetos.



Ejemplos:

1) Se tienen 7 libros y se deben escoger 3 para hacer un regalo. **¿De cuántas maneras se pueden escoger?**



Solución:

Si interesara el orden en que han de escogerse los libros, habría 210 maneras posibles de hacerlo (véase ejemplo de variaciones). Pero como el orden no interesa, hay que dividir esta cantidad por una permutación de 3 elementos, es decir, por $3! = 6$. Así, $\frac{210}{6} = 35$. Luego hay 35 posibilidades de escoger 3 libros de entre 7 para hacer un regalo.

2) ¿De cuántas maneras pueden se puede escoger a 4 alumnos de un conjunto de 10, para que hagan las compras para una convivencia?



Solución:

Aquí tampoco interesa el orden en que se escogen los alumnos, de ahí que, considerando el ejemplo 2 de variaciones que es muy parecido a éste, hay que dividir 5040 por una permutación de 4 elementos, es decir, por $4! = 24$. Entonces, $\frac{5040}{24} = 210$. Luego hay 210 grupos posible para hacer la compra.

Los ejemplos dados pueden resolverse con una expresión llamada fórmula de las combinaciones:



Definición: Una **combinación de n elementos sobre r elementos**, $\binom{n}{r}$, viene dada por la fórmula:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Para el primer ejemplo, se calcula $\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = 35$;

Para el segundo ejemplo, se calcula $\binom{10}{4} = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = 210$;



TIPS

En algunos textos y calculadoras científicas, en vez de $\binom{n}{r}$, se usa, C_r^n o nCr o $C(n,r)$ para denotar una combinación de n sobre r objetos.

En un problema de combinación no interesa el orden en que son escogidos los objetos

Actividad en el cuaderno

1) **¿Cuántas formas de seleccionar a tres candidatos a un trabajo de un total de 11 postulantes si todos presentan las mismas capacidades?**

2) Un estudiante para aprobar un examen que consta de 10 preguntas, debe contestar 7 de ellas. **¿De cuántas maneras puede hacer la selección para aprobar el examen?**



3) Si en una pequeña sala de teatro para 80 espectadores hay que reservar 10 butacas para invitaciones. **¿De cuántas formas pueden escogerse estas 10 butacas?**

4) **¿Cuántos triángulos se pueden hacer con los vértices de un pentágono?**



5) En una caja hay 10 bolitas azules y se necesita separar 6. **¿De cuántas maneras se puede hacer la elección?**

TIPS

En todo problema en que la solución sea una combinación, $\binom{n}{r}$, NO interesa el orden en que se escogen los objetos.



Un ejemplo más:

En un colegio hay 4 profesores de educación media de lenguaje y 3 profesores de matemáticas. Determinar el número de comités que se pueden formar con 2 profesores de lenguaje y 1 de matemáticas, para tomar pruebas orales recuperativas.



Solución:

Para seleccionar los profesores de lenguaje:

$$\binom{4}{2} = C(4,2) = \frac{4!}{(4-2)! 2!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

Para seleccionar los profesores de matemáticas:

$$\binom{3}{1} = C(3,1) = \frac{3!}{(3-1)! 1!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

Utilizando el principio multiplicativo, podemos elegir el comité de: $6 \cdot 3 = 18$ maneras.



ACTIVIDAD

Ejercicios combinados:

1) ¿Cuántos resultados posibles hay al lanzar 3 dados?



2. ¿Cuántos resultados posibles hay al lanzar 3 monedas?

3. En un partido de fútbol hay 3 resultados posibles: gana el local, gana la visita o los equipos empatan. Si se juegan un partido en Arica, otro en Rancagua y otro en Punta Arenas ¿cuántos resultados posibles hay en los tres partidos?



4) ¿Cuántas formas hay de seleccionar a tres candidatos a un trabajo de un total de once postulantes?

5) Cinco amigos forman un equipo para una competencia de tirar la cuerda ¿de cuántas maneras se pueden ordenar?

6) En una clase de 45 alumnos se quiere elegir un comité formado por seis estudiantes. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

7) ¿Cuántas palabras con o sin sentido, sin repetición de letras, se pueden hacer con 4 letras tomadas de un conjunto que considera las tres primeras vocales y las tres primeras consonantes?

8) ¿Cuántos números de 4 cifras, sin repetición de cifras, se pueden hacer con los dígitos pares (0 es par).

9) ¿Cuántas posibilidades hay de tomar 3 cartas del naipe español?



10) A una reunión de apoderados asisten 15 personas y se intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado?

11) ¿De cuántas maneras se pueden bajar de un ascensor 4 personas, en un edificio que tiene 7 pisos si todas se han subido en el primer piso?

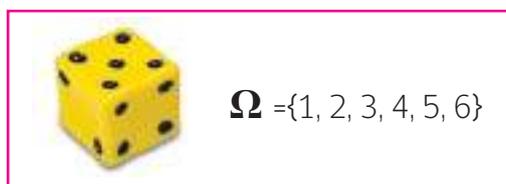
12) Un curso, compuesto por 25 hombres y 17 mujeres, forma un comité de 5 hombres y 3 mujeres. ¿Cuántos comités se puede formar?

CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD.

EXPERIMENTO ALEATORIO (E.A.): Es cualquier experiencia que tiene más de un resultado posible y que al ser realizada, no se sabe cuál de sus resultados va ocurrir pues ello es producto del azar. Ejemplos: lanzamiento de una moneda; lanzamiento de un dado; extracción de una bolita de una bolsa oscura que tiene una bolita blanca numerada con el número 0 y tres bolitas negras numeradas del 1 al 3.

ESPACIO MUESTRAL: Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Cada resultado del Espacio Muestral se debe poder representar como un conjunto que tiene un solo elemento. Un espacio muestral se denota con la letra griega Ω . Todo espacio muestral está asociado a un experimento aleatorio. Ejemplos:

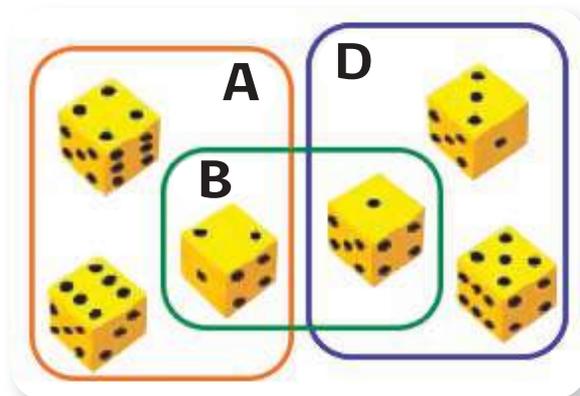
E.A.	Ω .
Lanzar una moneda	{cara, sello}
Lanzar un dado	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
Extraer una bolita de una bolsa oscura que tiene una bolita blanca numerada con el número 0 y tres bolitas negras numeradas del 1 al 3	{0, 1, 2, 3}



SUCESO: Es cualquier resultado que ocurre al realizar un experimento aleatorio, se representa mediante un subconjunto del espacio muestral. Los sucesos se denotan con las primeras letras del alfabeto, escritas en mayúsculas.

Ejemplos:

E.A.	Ω .	SUCESOS
Lanzar un dado	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	A: sale par = {2, 4, 6} B: sale < 3 = {1, 2} C: sale 1 = {1}
Extraer una bolita de una bolsa oscura que tiene una bolita blanca numerada con el número 0 y tres bolitas negras numeradas del 1 al 3	{0, 1, 2, 3}	A: sale una bolita blanca = {0} B: sale una bolita negra = {1, 2, 3} C: sale una bolita con un número par = {0, 2}



TIPS

Un suceso ocurre cuando al ser realizado el experimento aleatorio, ocurre cualquiera de sus elementos. Por ejemplo, si se lanza un dado, el suceso A, sale par, ocurre si sale 2, 4 ó 6, es decir, alguno de los elementos del conjunto A

SUCESO IMPOSIBLE: Es aquel que no tiene ninguna posibilidad de ocurrir, se representa mediante el conjunto vacío, \emptyset . Por ejemplo, al lanzar un dado es imposible que salga 7, entonces "sale 7" es un suceso imposible pues es un conjunto que no tiene ningún elemento del espacio muestral.

SUCESO SEGURO: Es aquel que ocurre siempre, es decir, cada vez que se realiza el experimento aleatorio. Se representa por Ω , pues tiene todos los elementos del espacio muestral. Por ejemplo, al lanzar un dado, el suceso "sale un divisor de 60", ocurrirá siempre, pues cada uno de los elementos de Ω : {1, 2, 3, 4, 5, 6}, es divisor de 60. El suceso, "sale menor o igual que 6", también es un suceso seguro.

PROBABILIDAD DE UN SUCESO: La probabilidad de un suceso es un valor que varía de 0 a 1; también se puede expresar como un tanto por ciento que varía de 0% a 100%. La probabilidad de un suceso A, corresponde al valor hacia el cual se observa que la frecuencia relativa o porcentual de A, tiende a estabilizarse, cuando se realiza el experimento aleatorio una gran cantidad de veces.

**Ejemplo:**

1) Cuatro personas están comprobando cuántas veces consiguen el número 3 al lanzar un dado, después de un número importante de lanzamientos.

Estos son los resultados que han obtenido:

- Vicente ha lanzado el dado 100 veces, y ha conseguido 25 veces el número 3.
- Gustavo ha tirado 350 veces el dado y ha sacado 55 veces el número 3.
- Matilda ha lanzado 1200 veces el dado; y entre ellas, 195 veces ha salido el número 3.
- Isidora ha obtenido 415 veces el número 3 y había lanzado 2500 veces.

Estos resultados los podemos ver agrupados en la siguiente tabla:

	Vicente	Gustavo	Matilda	Isidora
= N° de veces que se repite el experimento	100	350	1200	2500
= N° de veces que se obtiene el 3	25	67	195	415
= Frecuencia relativa	0,25	0,191	0,162	0,166

Se observa que al aumentar los lanzamientos, la frecuencia relativa se acerca a $0,1\bar{6}$. Este valor, $16,6\%$, es la probabilidad de obtener 3 al lanzar un dado.

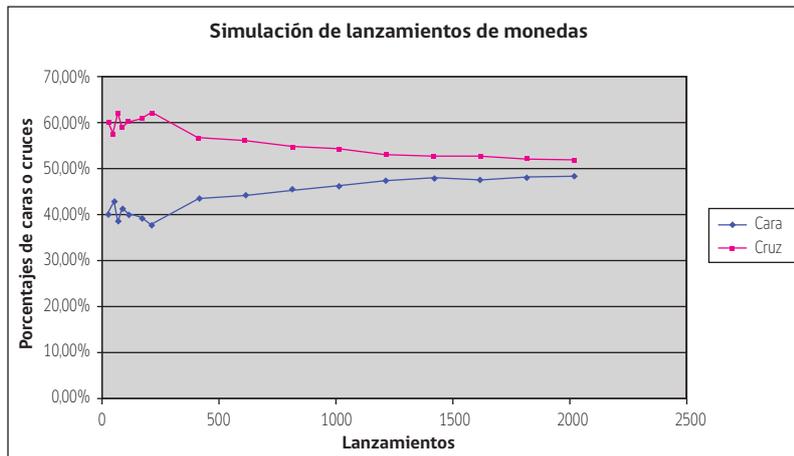
LEY DE LOS GRANDES NUMEROS (L.G.N.): Es una ley fundamental de la probabilidad, en términos sencillos dice que si se repite un experimento aleatorio una gran cantidad de veces, la frecuencia relativa o porcentual de cualquiera de sus sucesos, tiende a estabilizarse en un valor p . En el caso de un suceso A cualquiera, a este valor p se llama **probabilidad de A** y se anota, $P(A) = p$.



Ejemplo:

Supongamos que realizamos una gran cantidad de veces el **E.A: Extraer una bolita de una bolsa oscura que tiene una bolita blanca numerada con el número 0 y tres bolitas negras numeradas del 1 al 3** y observamos que la frecuencia porcentual de A: sale una bolita blanca, tiende al 25% y la frecuencia porcentual de C: sale una bolita con un número par, tiende al 50%.

Entonces, $P(A) = 25\%$ y $P(C) = 50\%$ y por lo tanto $P(A) < P(C)$. Con esto queremos decir que el suceso A es menos frecuente que el suceso C. Si tuviéramos que apostar por la ocurrencia de uno de estos sucesos al realizar el experimento aleatorio, con base en la L.G.N., debiéramos apostar por **C**. Así, la probabilidad de un suceso es una medida de su oportunidad de ocurrir.



ESPACIO MUESTRAL EQUIPROBABLE: Se trata de una importante propiedad con la que debe cumplir el espacio muestral de un experimento aleatorio. A veces es posible asociar más de un espacio muestral a un experimento aleatorio. Veámoslo con un ejemplo:

E.A.	Ω_1	Ω_2
Extraer una bolita de una bolsa oscura que tiene una bolita blanca numerada con el número 0 y tres bolitas negras numeradas del 1 al 3	{0, 1, 2, 3}	{blanca, negra}

Un espacio muestral es equiprobable si, de acuerdo a la L.G.N., cada uno de sus elementos ocurre con igual probabilidad. En el ejemplo dado, solo Ω_1 es equiprobable, pues cada uno de sus elementos (0, 1, 2, 3) tiene un 25% de probabilidad de ocurrir (en efecto, cada uno constituye una única posibilidad). En cambio Ω_2 no es un espacio muestral equiprobable, pues, de acuerdo a la L.G.N., la probabilidad de que la bolita extraída sea blanca es del 25% y la probabilidad de que sea negra es del 75% (efectivamente, el primer suceso tiene una posibilidad y el segundo suceso tiene 3 posibilidades).

REGLA DE LAPLACE: Esta regla, enunciada por el matemático francés Pierre Simón Laplace (1749 - 1827), significa una gran economía en el cálculo de probabilidades, pues en muchos casos evita la necesidad de realizar el experimento aleatorio. Esta regla dice que si se tiene un espacio muestral equiprobable y **A** es un suceso de ese espacio (recordemos que un suceso es un subconjunto de un espacio muestral), entonces es posible calcular la probabilidad de **A** mediante la siguiente fórmula:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número total de casos posibles}}$$



Ejemplos:

E.A.	Ω	SUCESOS	PROBABILIDAD
Lanzar una moneda	{cara, sello}	A: Sale cara	$P(A) = \frac{1}{2}$
Lanzar un dado	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	A: Sale par = {2, 4, 6} B: Sale < 3 = {1, 2} C: Sale 1 = {1}	$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $P(C) = \frac{1}{6}$
Extraer una bolita de una bolsa oscura que tiene una bolita blanca numerada con el número 0 y tres bolitas negras numeradas del 1 al 3	{0, 1, 2, 3}	A: Sale una bolita blanca={0} B: Sale una bolita negra = {1, 2, 3} C: Sale una bolita con un número par = {0, 2}	$P(A) = \frac{1}{4}$ $P(B) = \frac{3}{4}$ $P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

TIPS

Toda probabilidad puede ser expresada como una fracción propia de números cardinales o como un número decimal mayor igual que 0 o menor o igual que 1 y, como un porcentaje mayor o igual que 0% y menor o igual que 100%





PROBABILIDAD Y ESPACIOS MUESTRALES QUE SON UN CONJUNTO DE PARES ORDENADOS.

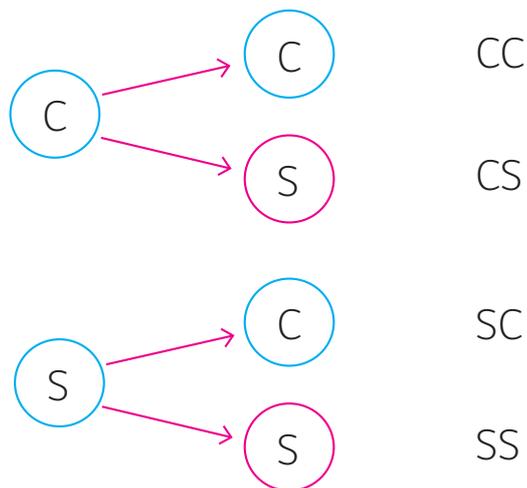
Un experimento aleatorio que implique, por ejemplo, dos lanzamientos de una moneda o un dado, da lugar a un espacio muestral de pares ordenados. Analizaremos estos dos casos aplicándolos al cálculo de algunas probabilidades.



Ejemplos:

1) LANZAMIENTO DE UNA MONEDA DOS VECES:

- Si cara se representa por una **c** y sello, por una **s** y aplicando el diagrama del árbol, determinamos el espacio muestral:



Así el espacio muestral queda como sigue: $\Omega = \{ (c,c), (c,s), (s,c), (s,s) \}$. Como se ve, Ω tiene 4 elementos.

Algunos sucesos asociados a este experimento aleatorio:

A: la primera vez sale cara = $\{ (c,c), (c,s) \}$.

B: sale una sola cara = $\{ (c,s), (s,c) \}$.

C: sale al menos una cara = $\{ (c,c), (c,s), (s,c) \}$

Las respectivas probabilidades:

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad P(C) = \frac{3}{4}$$



Se lanzan dos monedas, una es roja y la otra es azul, calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

- 1) Salen 2 caras
- 2) No sale cara en ninguna de las monedas
- 3) Ambas monedas salen idénticas
- 4) Sale cara en la moneda roja

2) LANZAMIENTO DE UN DADO DOS VECES:

El espacio muestral en este caso es $\Omega = \{ (1,1), (1,2), \dots, (6,5), (6,3) \}$, para visualizarlo mejor, se puede usar el siguiente esquema:

						
	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

En este caso, Ω tiene 36 elementos. Cada par ordenado representa un resultado del E.A. Así, por ejemplo, el par ordenado (1,3) significa que en el primer lanzamiento salió un 1 y en el segundo lanzamiento, salió un 3; en cambio, el par ordenado (3,1) significa que en el primer lanzamiento salió un 3 y en el segundo lanzamiento, salió un 1.



Consideremos y describamos algunos sucesos de Ω y calculemos su probabilidad:

A: Sale un 6 en ambos lanzamientos = $\{ (6,6) \}$.

B: Sale el mismo número = $\{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) \}$.

C: La suma es menor o igual que 4 = $\{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1) \}$

Las respectivas probabilidades son:

$$P(A) = \frac{1}{36} \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$



Actividad en el cuaderno

1. Marque con una cruz (x) usando un lápiz de color el suceso A del ejemplo anterior; haga lo mismo con los sucesos B y C (usando lápices de diferentes colores en cada caso) y observe que se forma una figura.
2. Se lanza un dado dos veces, calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos contabilizando primero sus elementos con la técnica que realizó en la pregunta anterior:
 - a) La primera vez sale un 3 y la segunda vez sale un 4
 - b) Sale un 1 solo la primera vez
 - c) La suma es 7
3. Se lanzan dos dados, uno es rojo y el otro, azul. El esquema de más abajo permite visualizar los elementos del espacio muestral. Calcule la probabilidad de cada suceso:
 - a) Sale un 2 en el dado azul y un 3 en el dado rojo
 - b) Salen un 2 y un 3
 - c) Sale un 2
 - d) Salen números consecutivos

						
	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

4. Calcule las probabilidades de (b), (c) y (d) de la pregunta anterior si ambos dados son blancos
5. **¿En qué caso es más probable obtener dos unos al lanzar dos dados, con blancos o de colores? ¿Cambia la probabilidad de este suceso si en vez de lanzar dos dados, se lanza uno solo dos veces?**
6. Escriba un suceso que sea posible en el caso del lanzamiento de un dado dos veces, pero que no sea posible en el caso del lanzamiento de dos dados.

PROBABILIDAD Y COMBINATORIA.

El recuento de los casos favorables y de los casos posibles en el cálculo de probabilidades, aplicando la regla de Laplace, puede volverse cada vez más complejo, como sucede, por ejemplo, al aumentar el número de monedas y el número de dados. Si se trata de tres monedas, aun es posible usar un diagrama de árbol para visualizar Ω , pero en el caso de 3 dados es más incómodo y, además, innecesario. En estos casos y en otros aun más complejos, la combinatoria es una herramienta eficiente.

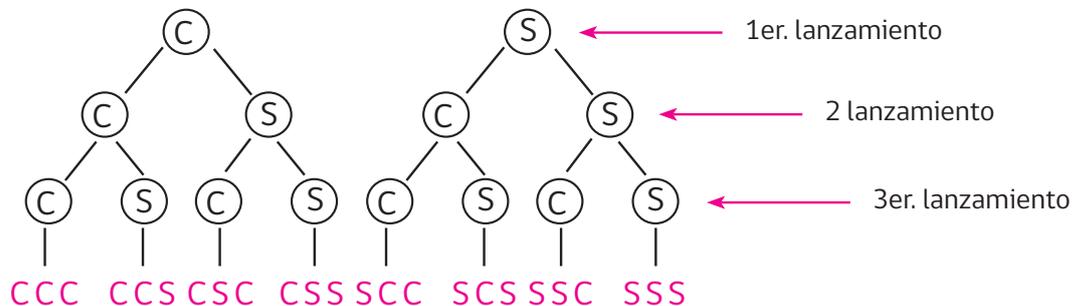


Ejemplos:

1. Se lanzan una moneda tres veces ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos una vez cara?

Solución:

Visualicemos Ω :



El diagrama permite apreciar que en un total de 8, hay 7 posibilidades en las que se obtiene al menos una vez cara (la excepción es el trío (s, s, s)). En consecuencia la probabilidad de este suceso es $\frac{1}{8}$.

Sin embargo el problema se puede resolver del siguiente modo aplicando la combinatoria:

Número de casos posibles: número de resultados posibles al lanzar 3 veces una moneda, de acuerdo al principio multiplicativo esto es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Número de casos favorables: De estas ocho posibilidades, hay una sola excepción, (s, s, s), en las restantes 7 ha de haber al menos una cara.

En consecuencia la probabilidad de obtener al menos una vez cara al lanzar una moneda 3 veces es $\frac{1}{8}$.

2. Se lanzan 4 monedas ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente una cara?

Solución:

Aplicando combinatoria:

Número de casos posibles: número de resultados posibles al lanzar 4 monedas, de acuerdo al principio multiplicativo esto es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Número de casos favorables: En 4 lanzamientos cualquiera de ellos puede resultar cara por lo que hay 4 posibilidades $\binom{4}{1}$

De modo que de las estas 16 posibilidades totales, hay 4 que contienen exactamente una cara. En consecuencia la probabilidad pedida es $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

3. Se lanza un dado tres veces ¿Cuál es la probabilidad de que salga 2 por primera vez en la última tirada?

Solución:

Aplicando combinatoria:

Número de casos posibles: número de resultados posibles al lanzar un dado 3 veces, de acuerdo al principio multiplicativo esto es $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Número de casos favorables: En el primer lanzamiento hay 5 posibilidades, pues queda excluida la posibilidad de que salga 2; por la misma razón, también hay solo 5 posibilidades en el segundo lanzamiento; en el tercer lanzamiento hay una sola posibilidad ya que debe salir 2. Así, el número de casos favorables es $5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$.

En consecuencia la probabilidad pedida es $\frac{25}{216}$

4. Se tiene una bolsa oscura con 4 bolitas blancas, 5 bolitas negras y 6 bolitas rojas. Si se extraen al azar simultáneamente 4 bolitas, calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Salen las 4 bolitas blancas

Solución:

Número de casos posibles: de acuerdo a la combinatoria, el número de maneras de escoger 4 bolitas de un total de 15, sin que interese el orden (pues se extraen de manera simultánea) es $\binom{15}{4} = 1365$.

Número de casos favorables: Como solo hay 4 bolitas blancas, existe una sola posibilidad pues hay que tomarlas todas simultáneamente (no interesa el orden)

En consecuencia la probabilidad pedida es $\frac{1}{1365}$

b) Salen todas negras

Solución:

Número de casos posibles: este ya se calculó y es $\binom{15}{4} = 1365$.

Número de casos favorables: Como hay 5 bolitas negras y hay que tomar 4, esto se puede hacer de $\binom{5}{4} = 5$ maneras distintas, (recuérdese que al tomar 4 siempre se dejará una afuera y esto puede hacerse de 5 maneras diferentes).

En consecuencia la probabilidad pedida es $\frac{5}{1365} = \frac{1}{273}$

c) Salen todas rojas

Solución:

Número de casos posibles: 1365.

Número de casos favorables: Como hay 6 bolitas rojas y hay que tomar 4, esto se puede hacer de

$\binom{6}{4} = 15$ maneras distintas

En consecuencia la probabilidad pedida es $\frac{15}{1365} = \frac{1}{91}$

d) Salen dos negras y dos rojas

Solución:

Número de casos posibles: 1365.

Número de casos favorables: Como hay 5 bolitas negras y hay que tomar 2, esto se puede hacer de $\binom{5}{2} = 10$ maneras distintas. Del mismo modo hay $\binom{6}{2} = 15$ maneras distintas de tomar 2 bolitas rojas de un total de 6. De acuerdo al principio multiplicativo, hay $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} = 10 \cdot 15 = 150$ maneras diferentes de tomar 4 bolitas, 2 negras y 2 rojas, de esta bolsa.

Por lo tanto la probabilidad pedida es $\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{15}{4}} = \frac{10 \cdot 15}{1365} = \frac{150}{1365} = \frac{10}{91}$



Actividad en el cuaderno

- 1) De una baraja de 52 naipes (sin jokers), mezclados al azar, se sacan dos naipes. Hallar la probabilidad de que ambas sean ases si la primera carta se devuelve al mazo.
- 2) Una caja contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se sacan tres bolas al azar, determine la probabilidad de que:
 - a) 2 sean rojas y 1 blanca
 - b) ninguna sea blanca
 - c) al menos una sea blanca
- 3) Una urna A tiene 4 bolitas blancas y 3 negras. Otra urna B tiene 3 bolitas blancas y 2 negras. Se extrae al azar una bolita de cada urna. Calcule la probabilidad de que ambas bolitas sean blancas.
- 4) Una caja fuerte tiene una clave de 4 dígitos seguidas dos vocales. ¿Cuál es la probabilidad de abrir la caja por azar al primer intento?
- 5) De una baraja de 52 naipes (sin jokers), mezclados al azar, se sacan dos naipes. Hallar la probabilidad de que ambas sean ases si la primera carta NO se devuelve al mazo.
- 6) Una caja contiene 6 bolas rojas, 4 blancas y 3 azules. Si se sacan una a una 5 bolas al azar sin restitución, determine la probabilidad de:
 - a) Sacar todas las bolas azules
 - b) sacar 3 bolas rojas, una blanca y una azul





ACTIVIDAD

Resuelva los siguientes problemas de probabilidades:

1) Marcela almuerza en el casino de su trabajo de lunes a viernes, y siempre hay dos variedades de entradas: plato verde y plato mixto, además de tres variedades de plato de fondo: carne roja con acompañamiento, pescado con acompañamiento, pollo con acompañamiento. **¿cuál es la probabilidad de escoger un menú con plato mixto y carne roja con acompañamiento?**

2) Si lanzamos cuatro monedas de \$100. Cuál será la probabilidad de:

a) Obtener un sello.

b) Obtener al menos un sello.

c) No obtener sello.

d) A lo más dos caras.

3) El menú de un casino ofrece lo siguiente:

Dos entradas: ensalada de tomates con cebolla y tomate relleno.

Tres platos de fondo: porotos granados, pastel de papas y cazuela de ave.

Tres tipos de postre: macedonia, tutti frutti y helado.

Según el menú:

a) Si un cliente elige un menú al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su elección incluya cazuela de ave?

b) Usted elija un menú. Determine la probabilidad que tiene el menú de ser elegido.

4) Alexis y Andrea juegan a lanzar dos dados a la vez y calculan la suma de las puntuaciones. Si sale número par, gana Andrea y si sale impar gana Alexis.

a) **¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma par?**

b) **¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma impar?**

5) Un candado con clave secreta tiene cuatro ruedas numeradas del 0 al 9. Nicolás olvidó su clave. Recuerda que empieza con una cifra impar y que termina con un cuatro o seis pero no recuerda en qué orden, es decir, no recuerda si termina en 46 o 64. **¿Cuál es la probabilidad de que acierte en el primer intento?**



EVALUACIÓN

1. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar tres veces una moneda, se obtengan 2 caras?

- a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{7}$ e) $\frac{3}{8}$

2. Un estuche contiene 3 lápices rojos y 2 negros. Si se sacan uno a uno 2 lápices sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que esos lápices sean negros?

- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{100}$ c) 3 d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{1}{10}$

3. En una urna hay 10 fichas blancas y 5 azules. La probabilidad de que, de dos fichas extraídas una tras otra sin devolución, la primera ficha sea blanca y la segunda sea azul es:

- a) $\frac{7}{21}$ b) $\frac{16}{21}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{5}{21}$ e) Otro valor

4. Se toman una a una sin reposición, cinco cartas de una baraja de 52. ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro primeras sean ases y la última, reina de diamantes?

- a) $\frac{4!}{52}$ b) $\frac{4!}{52!}$ c) $\frac{4! \cdot 52!}{48}$ d) $\frac{4! \cdot 47!}{51!}$ e) $\frac{4! \cdot 47!}{52!}$

5. Si Jorge dispone de 3 camisas diferentes y dos corbatas también diferentes, entonces ¿de cuántas maneras diferentes puede ponerse una camisa y una corbata?

- a) 3
b) 5
c) 6
d) 8
e) 9

6. Con relación al número combinatorio C_3^7 ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

- I) equivale a 35
II) equivale al número de señales tricolores que se puede hacer con 7 banderas de diferente color.
III) equivale a C_4^7 .

- a) Sólo I
b) Sólo II
c) Sólo I y II
d) Sólo I y III
e) I, II y III

Guía de trabajo N° 2

Herramientas para entender un mundo con azar: “Algunas leyes de Probabilidad”



Contenidos

- Ley de la suma (sucesos mutuamente excluyentes y complementarios)
- Probabilidad condicional
- Ley del producto
- Ley de la probabilidad total

SUCESOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES.

Dos o más sucesos son mutuamente excluyentes o incompatibles, si una vez realizado el experimento, la ocurrencia de uno de estos sucesos excluye toda posibilidad de que ocurra el otro suceso.



Ejemplos:

1) Supongamos que se extrae al azar una bolita de una caja que contiene 3 bolitas negras, 2 blancas y 1 azul. Los sucesos A: sale negra y B: sale azul, son mutuamente excluyentes, pues si al realizar el E.A. se extrae una bolita negra, es imposible que sea azul y viceversa.

2) E.A: Se lanza un dado.

Sucesos: A: Sale mayor que 4; B: sale menor o igual a 2

A y B son sucesos incompatibles, pues si sale un número menor o igual que 2 (1 ó 2) es imposible que salga un número mayor que 4 (5 ó 6) y viceversa.

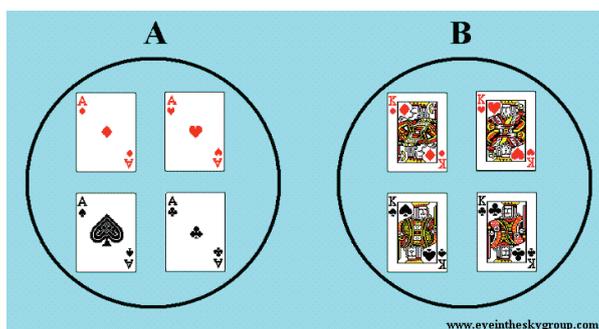
Obsérvese que los sucesos A: { 5, 6 } y B: { 1, 2 } no tienen elementos en común, es decir, $A \cap B = \Phi$

3) E.A: Se lanzan dos monedas.

Sucesos: A: Salen iguales y B: sale exactamente una cara

A y B son sucesos mutuamente excluyentes, pues $A \cap B = \Phi$. En efecto:

A: { (c,c), (s,s) } y B: { (c,s), (s,c) } no tienen elementos en común, esto significa que si ocurre A, no puede ocurrir B y viceversa.



Actividad en el cuaderno

Escriba un par de sucesos mutuamente excluyentes para cada experimento aleatorio:

a) Se lanzan 3 monedas

b) Se lanzan 2 dados

SUCESOS COMPLEMENTARIOS O CONTRARIOS.

Dos sucesos A y B son complementarios, si uno de ellos es el suceso contrario del otro. Esto significa que A es el suceso, **no ocurre B**.



Ejemplos:

1) E.A: Se lanza una moneda.

Es obvio que el suceso A: sale cara es el suceso contrario del suceso B: sale sello

2) E.A: Se lanza un dado. En este caso hay varias posibilidades de parejas de sucesos contrarios, por ejemplo:

a) A: Sale par; B: sale impar

b) A: Sale mayor que 4; B: sale menor o igual que 4

Si B es el suceso contrario o complementario de A, se dice que B es el complemento de A, esto se escribe, $B = A^c$.

La unión de sucesos contrarios es el espacio muestral, es decir, $A \cup B = \Phi$.

Por otro lado, puesto que $A \cap B = \Phi$, es evidente que los sucesos complementarios son mutuamente excluyentes.

						
	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)



Actividad en el cuaderno

Escriba dos pares de sucesos complementarios para cada experimento aleatorio:

a) Se lanzan 2 monedas

b) Se lanzan 2 dados

LEY DE LA SUMA DE PROBABILIDADES O REGLA DEL "o" PARA SUCESOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES.

Esta regla dice que la probabilidad de que ocurra cualquiera de dos o más sucesos, es la suma de sus probabilidades siempre y cuando esos sucesos sean mutuamente excluyentes.



Ejemplos:

1) Supongamos que se extrae al azar una bolita de una caja que contiene 3 bolitas negras, 2 blancas y 1 azul. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bolita negra o azul?

Solución:

Si A es el suceso, la bolita extraída es negra y B: la bolita extraída es azul. La probabilidad de que ocurra A o B se expresa:

$$P(A \cup B)$$

Y dado que A y B son sucesos mutuamente excluyentes $P(A \cup B = \Phi)$, es posible calcular $P(A \cup B)$ como la suma de las probabilidades de A y de B.

En efecto: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ y $P(B) = \frac{1}{6}$ y Luego,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Es cierto que $P(A \cup B)$ puede ser calculada directamente mediante el recuento de casos favorable al suceso $A \cup B$ y del total de casos de Ω , aplicando luego la regla de Laplace, pero también es valioso que la probabilidad de un suceso pueda calcularse a partir de otras probabilidades como ocurre en el caso de $P(A \cup B)$.

2) E.A: Se lanza un dado. **¿Cuál es la probabilidad de que salga un número mayor que 4 o un número menor o igual que 2?**

Solución:

Sucesos: A: Sale mayor que 4; B: sale menor o igual que 2

$A = \{5, 6\}$ y $B = \{1, 2\}$ son sucesos incompatibles, pues

$$A \cap B = \Phi \text{ Además } P(A) = \frac{2}{6} \text{ y } P(B) = \frac{2}{6},$$

Entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

3. E.A: Se lanzan dos monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan iguales o que salga exactamente una cara?

Solución:

Sucesos: A: Salen iguales y B: sale exactamente una cara

Es claro que el suceso B es equivalente al suceso complementario de A, A^c : salen diferentes. En efecto, $A: \{(c,c), (s,s)\}$; $B: \{(c,s), (s,c)\}$; $B = A^c$; $A \cup A^c = \Omega$ y $A \cap A^c = \Phi$. Entonces,

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Este ejemplo ilustra que para cualquier suceso A:

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$$

De donde se deduce:

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

4. Si la probabilidad de que mañana llueva es del 90% ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva?



Solución:

Sucesos: A: Mañana no llueve y A^c : Mañana llueve

$$P(A^c) = 0,9$$

como $P(A) = 1 - P(A^c)$, entonces,

$$P(A) = 1 - 0,9 = 0,1$$

Por lo tanto, la probabilidad de que no llueva mañana es del 10%

Actividad en el cuaderno

En cada caso, calcule las probabilidades pedidas aplicando justificadamente la regla del "o":

- 1.** E.A: Se lanza un dado. ¿cuál es la probabilidad de que salga un cuadrado perfecto o un número primo?
- 2.** Se lanzan 3 monedas ¿cuál es la probabilidad de obtener una o dos caras?
- 3.** Se lanzan dos dados ¿cuál es la probabilidad de obtener suma 3 u 11?

PROBABILIDAD DE SUCESOS CONDICIONADOS.

Norte claro, sur oscuro. ¿Lloverá hoy en nuestro pueblo? Encendemos la radio y escuchamos que esta probabilidad es del 80%. Miramos al cielo de norte a sur y comprobamos que hacia el norte se ve claro y hacia el sur, se ve oscuro. Entonces recordamos el adagio: Norte claro, sur oscuro, aguacero seguro... y sabemos que la lluvia es inminente, que la probabilidad es aún mayor que el 80%. Esto significa que cuando aumentamos la información acerca de un suceso, su probabilidad de ocurrir se cambia.



La probabilidad condicional consiste en calcular la probabilidad de un suceso A dado que ocurrió otro suceso B. La ocurrencia de B implica una modificación del espacio muestral considerado para el cálculo de la probabilidad de A. Veamos un ejemplo:



Ejemplos:

Se lanza un dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga 2 dado que salió par? En este caso el espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se reduce a las posibilidades del suceso ocurrido $\{2, 4, 6\}$. Entonces la probabilidad de que salga 2 se calcula sobre el espacio muestral reducido, lo que da $\frac{1}{3}$.

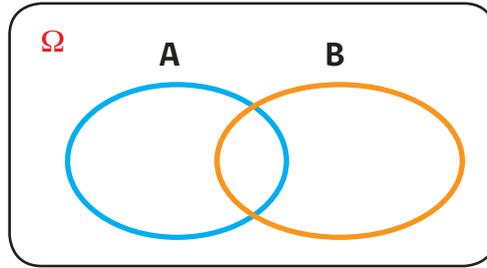
b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga < 3 dado que salió > 1? Ahora Ω se reduce a $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ por lo que probabilidad pedida resulta $\frac{1}{5}$.

Definición: Si A y B son sucesos, entonces el suceso **“A dado que ocurrió B”** se escribe **A/B**.

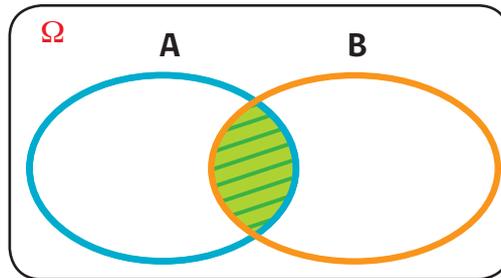
En la situación (a) del ejemplo anterior, A: sale 2; B: sale par y A/B: sale 2 dado que salió par. La probabilidad de que salga 2 dado que salió par, se escribe $P(A/B)$ y es igual a $\frac{1}{3}$.

En la situación (b), A: sale < 3; B: sale > 1; $P(A/B) = \frac{1}{5}$

El siguiente ejemplo permite una comprensión visual de la probabilidad condicional:
 Una niña juega a lanzar un dado sobre un panel rectangular de área 1 m² como el de la figura.



Si se sabe que el dado ha caído en el círculo B ¿cuál es la probabilidad de que haya caído en A?



Una vez que sabemos de la ocurrencia de un evento B, esto es, el dado ha caído en la región B, se puede considerar que B es el nuevo espacio muestral y la probabilidad de que el dado haya caído en la región A, dado que cayó en la región B ($P(A/B)$), es la proporción de B que representa la parte de A que está en B, es decir, el área de la intersección de las regiones A y B ($\acute{a}(A \cap B)$), dividida por el área de de la región B ($\acute{a}(B)$):

$$\acute{a}(A/B) = \frac{\acute{a}(A \cap B)}{\acute{a}(B)}$$



1) Un grupo de personas adultas de una ciudad ha cumplido los requisitos para graduarse de enseñanza media. El siguiente cuadro los clasifica por sexo y si están trabajando actualmente o están desempleados.

	Empleado	Desempleado	Total
Hombre	46	4	50
Mujer	14	26	40
Total	60	30	90

Se seleccionará, al azar, a una de estas personas para que realice un viaje a través de todo el país, con la intención de promocionar lo beneficioso de regularizar la situación escolar de cada persona. **¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada al azar sea hombre sabiendo que está trabajando?**

2) Si se lanza dos veces un dado equilibrado de seis caras. **¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos de los lanzamientos sea nueve, dado que en el primer lanzamiento se obtuvo un número par?**

3) Desde una bolsa que contiene 15 semillas de flores rojas y 5 de flores blancas. Se seleccionan dos semillas al azar, una por una, cuál es la probabilidad de que:

a) **¿La primera semilla sea de una flor roja?**

b) **¿La segunda semilla sea de una flor blanca dado que la primera fue de una flor roja?**

4) Una persona lanza una moneda 3 veces, **¿cuál es la probabilidad de obtener 3 caras dado que salió por lo menos una cara?**



INDEPENDENCIA DE SUCESOS.

Además de que la probabilidad condicional permite una alteración de la probabilidad de un evento a la luz de mayor información, también da lugar para que se entienda mejor el importante concepto de independencia o, en el contexto actual, el de eventos independientes.

Dos sucesos A y B son independientes si $P(A) = P(A/B)$ y si $P(B) = P(B/A)$

Esto significa que la ocurrencia del suceso A no está afectado por la ocurrencia del suceso B y viceversa.



Ejemplos:

1. Se lanza un dado ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par si salió un número menor que 5? Analiza si hay independencia de sucesos.

Solución:

A : sale par; B : sale < 5

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; P(A/B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ por lo tanto } P(A) = P(A/B), \text{ por otro lado,}$$

$$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; P(B/A) = \frac{2}{3} \text{ por lo tanto } P(B) = P(B/A)$$

Entonces A y B son sucesos independientes.

2) En un curso se dió la posibilidad de que los alumnos escogieran un idioma y un taller de arte.

	Visuales	Música
Inglés	16	8
Francés	4	2

Solución:

A: Escoge música; B: Escoge Inglés

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}; P(A/B) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}; \text{ Por lo tanto } P(A) = P(A/B), \text{ por otro lado,}$$

$$P(B) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}; P(B/A) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \text{ Por lo tanto } P(B) = P(B/A).$$

Entonces A y B son sucesos independientes.



Actividad en el cuaderno

- 1) Se extrae una carta de un mazo de un naipes inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea una figura dado que es de diamante? ¿Son independientes estos sucesos?
- 2) Se lanzan una moneda 2 veces. A: Sale cara en el primer lanzamiento; B: sale cara en el segundo lanzamiento. ¿Son A y B independientes?
- 3) Se lanza un dado 2 veces. ¿Son independientes los sucesos: A: la primera vez sale un 6; B: la segunda vez sale un 6?
- 4) Se tiene una bolsa oscura con 3 bolitas, 2 negras y una blanca. Se sacan dos bolitas al azar **con reposición**. A: Sale negra en la primera extracción; B: sale negra en la segunda extracción. ¿Son A y B independientes?



LEY DEL PRODUCTO DE PROBABILIDADES O REGLA DEL “y”.

Esta ley se refiere a la probabilidad conjunta o simultánea de dos sucesos. El suceso “A y B ocurren simultáneamente” se denota, $(A \cap B)$ y su probabilidad, $P(A \cap B)$, puede calcularse mediante la siguiente regla o definición:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) \text{ o también: } P(A \cap B) = P(B) * P(A/B).$$



Ejemplos:

1) Supongamos que se extraen sucesivamente al azar dos bolitas de una caja que contiene 3 bolitas negras, 2 blancas y 1 azul. ¿Cuál es la probabilidad de extraer primero una bolita negra y después una bolita azul?

Solución:

Si A es el suceso, la primera bolita extraída es negra y B: la segunda bolita extraída es azul. La probabilidad de que ocurran A y B simultáneamente, se calcula:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Luego, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; y $P(B/A) = \frac{1}{5}$. Entonces,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

2) E.A: Se lanza un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número primo y un número par?

Solución:

Sucesos: A: Sale primo; B: sale par

$A = \{2, 3, 5\}$ por lo que $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ y $B/A = \{2\}$ por lo que

$P(B/A) = \frac{1}{3}$. Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Por otro lado $B = \{2, 4, 6\}$ por lo que $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ y $A/B = \{2\}$ por lo que $P(A/B) = \frac{1}{3}$.

$$\text{Entonces: } P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Es cierto que en este ejemplo $(A \cap B) = \{ 2 \}$ puede obtenerse fácilmente a partir de $A = \{ 2, 3, 5 \}$ y $B = \{ 2, 4, 6 \}$ y por consiguiente $P(B / A) = \frac{1}{6}$ es también fácil de calcular. Sin embargo esto no siempre ocurre así siendo más fácil el cálculo de $P(A \cap B)$ mediante $P(A) \cdot P(B / A)$. Nuevamente se subraya el valor de que suceso la probabilidad de un suceso pueda calcularse a partir de las probabilidades de otros sucesos.



Actividad en el cuaderno

1) Se extrae una carta de un mazo de un naipe inglés. **¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea una figura y un diamante?**

2) Se tiene una bolsa oscura con 3 bolitas, 2 negras y una blanca. Se sacan dos bolitas al azar sin reposición. Calcule la probabilidad de que salgan bolitas negras al cabo de las dos extracciones.

3) Se lanzan un dado, **¿cuál es ahora la probabilidad que sea menor que 5 y par?**

4) La probabilidad de que la dueña de casa esté cuando un vendedor de cable y telefonía la llame para ofrecerle el servicio, es de 0,30. Dado que ella está en casa, la probabilidad de que compre los productos de cable y telefonía es de 0,40. Encuentre la probabilidad de que la dueña de casa esté y adquiera el servicio.



5) La probabilidad de que un médico diagnostique de manera correcta una enfermedad en particular es de 0,6. Dado que el doctor hace un diagnóstico incorrecto, la probabilidad de que el paciente presente una demanda es de 0,85. **¿Cuál es la probabilidad de que el doctor haga un diagnóstico incorrecto y el paciente lo demande?**



6) La probabilidad de que cierta persona salga a desayunar es de 0,40 y la probabilidad de que si sale a desayunar gaste más de \$ 5.000 es de 0,75. **¿Cuál es la probabilidad de que salga a desayunar y gaste más de \$ 5.000?**



7) Se extraen cinco cartas sin reemplazo de una baraja normal de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de obtener en todas las extracciones un as.



PROBABILIDAD CONJUNTA Y SUCESOS INDEPENDIENTES

Se vio que si A y B son sucesos independientes, entonces $P(B / A) = P(B)$; entonces la expresión,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

se transforma en:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Retomemos los ejemplos ya vistos anteriormente sobre independencia de sucesos y analicémoslos aplicando esta nueva regla.



Ejemplos:

1) Se lanza un dado ¿hay independencia entre los sucesos A: obtener un número par y B: obtener un número menor que 5?

Solución:

A: sale par; B: sale < 5

Por un lado:

$$(A \cap B) = \{2, 4\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Por otro lado:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

$$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Luego: } P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Por lo que se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Entonces A y B son sucesos independientes.

2) En curso se dio la posibilidad de que los alumnos escogieran un idioma y un taller de arte.

	Visuales	Música
Inglés	16	8
Francés	4	2

¿Son independientes los sucesos A: Escoge música; B: Escoge Inglés?

Solución:

A: Escoge música; B: Escoge Inglés

Por un lado: $(A \cap B)$: escoge música y escoge inglés

$$P(A \cap B) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$\text{Por otro lado: } P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}; \quad P(B) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Luego: } P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$$

Por lo que se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Entonces A y B son sucesos independientes

3) Se lanza una moneda 2 veces ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 sellos?

Solución:

Como el resultado de lo que sale en un lanzamiento, no está afectado por el resultado que sale en el otro, entonces hay independencia de sucesos. Luego, la probabilidad pedida es: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

4) Se lanza una dado 3 veces ¿cuál es la probabilidad de obtener la primera vez un número par, la segunda vez un número primo y la tercera vez un 1?

Solución:

Nuevamente el resultado de lo que sale en un lanzamiento, no está afectado por el resultado que sale en los otros, por lo que hay independencia de sucesos. Entonces la probabilidad pedida es: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$





Actividad en el cuaderno

En cada caso, aplique la regla de independencia de sucesos $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

- 1) Se extrae una carta de un mazo de un naipes inglés. **¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea una figura dado que es de diamante? ¿Son independientes estos sucesos?**
- 2) Se lanzan una moneda 4 veces. **¿Cuál es la probabilidad de que salga las 4 veces sello?**
- 3) Se lanza un dado 2 veces. **¿cuál es la probabilidad de que salga primero un número divisor de 12 y luego otro número múltiplo de 3?**
- 4) Se tiene una bolsa oscura con 3 bolitas, 2 negras y una blanca. Se sacan dos bolitas al azar **con reposición**. A: Sale negra en la primera extracción; B: sale negra en la segunda extracción. **¿Son A y B independientes?**

- 5) En un poblado rural se dispone de un carro de bomberos y una ambulancia para emergencias. La probabilidad de que el primero esté disponible es de 0,9 y la probabilidad de que la ambulancia esté disponible es de 0,95. En el caso de que haya un incendio y resulte alguien herido, **¿cuál es la probabilidad de que el carro de bomberos y la ambulancia estén disponibles?**



- 6) Se extraen cinco cartas con reemplazo de una baraja normal de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de obtener en todas las extracciones un as.

- 7) Se sabe que la probabilidad de que una jugadora de basquetbol enceste en un tiro libre es de 0,40 en cada uno de sus 5 primeros tiros (luego se cansa y esta probabilidad disminuye). Si hace 4 intentos de tiro libre. **¿Cuál es la probabilidad de que todos sean encestandos?**

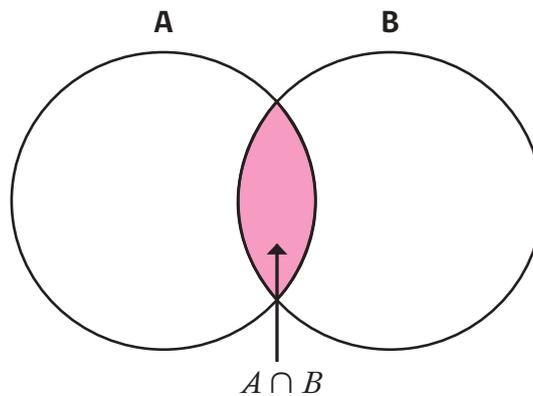


LEY DE LA SUMA DE PROBABILIDADES O REGLA DEL "o" PARA DOS SUCESOS CUALQUIERA

Esta regla se refiere a $P(A \cup B)$, la probabilidad de que ocurra cualquiera de dos sucesos (no importa que los sucesos sean mutuamente excluyentes). Se expresa mediante la siguiente regla:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

La regla de la probabilidad total puede explicarse del siguiente modo: Supongamos que en la figura, la probabilidad de achuntar a la región A con un dardo es $P(A)$; la probabilidad de achuntar a la región B es $P(B)$ y la probabilidad de achuntar a la región común, es decir a la intersección de áreas, es $P(A \cap B)$.

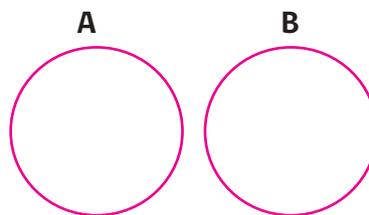


¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dardo, le achuntemos a la región A o a la región B, es decir, cuál es $P(A \cup B)$?

Es evidente que si respondemos $P(A) + P(B)$ estaremos considerando dos veces $P(A \cap B)$, la probabilidad de que el dardo caiga en la región de color.

Por lo tanto: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Observemos que si las regiones A y B no se intersectan, $(A \cap B) = \phi$, como se muestra en la figura:



Sucesos mutuamente excluyentes

Entonces $P(A \cap B) = P(\Phi) = 0$ y $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se convierte en la fórmula ya vista:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para sucesos mutuamente excluyentes.



Ejemplos:

1) Supongamos que se extrae al azar una bolita de una caja que contiene 3 bolitas negras, numeradas del 1 al 3 y 2 bolitas blancas numeradas con 4 y 5, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bolita negra o impar?

Solución:

Si A es el suceso, la bolita extraída es negra y B: la bolita extraída es impar. Entonces: $P(A) = \frac{3}{5}$; $P(B) = \frac{3}{5}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{5}$ Luego,

$$P(A \cup B) = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

Observemos que si se realiza un recuento directo de los casos favorables al suceso que interesa, $(A \cup B) = \{n1, n2, n3, b5\}$, tiene 4 elementos pues a las 3 bolitas negras se agrega la bolita blanca número 5. Entonces $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$

2) E.A: Se lanza un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número mayor que 4 o un número primo?

Solución:

Sucesos:

A: Sale mayor que 4 = { 5, 6 }; B: sale primo = { 2, 3, 5 }. Entonces: $P(A) = \frac{2}{6}$; $P(B) = \frac{3}{6}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Luego,

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

3) E.A: Se lanzan 3 monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que salga exactamente 1 cara o 3 caras?

Solución:

Sucesos:

A: exactamente una cara = { (c, s, s), (s, c, s), (s, s, c) };

B: salen 3 caras = { (c, c, c) }.

Entonces: $P(A) = \frac{3}{8}$; $P(B) = \frac{1}{8}$ y $P(A \cap B) = 0$

A y B = son sucesos incompatibles, pues $A \cap B = \Phi$.

Entonces $P(A \cap B) = P(\Phi) = 0$

Luego:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} - 0 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$



- 1) **¿Cuál Es la probabilidad de que al lanzar un dado salga par o o factor de 6?**

- 2) Se lanzan dos dados **¿cuál es la probabilidad de que la suma sea múltiplo de 6 o 4?**

- 3) Se lanza una moneda y un dado. **¿Cuál es la probabilidad de obtener "cara" o "tres"?**

- 4) Se lanza simultáneamente dos monedas. **¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 2 caras o al menos un sello?**

- 5) Se organiza un sorteo en el que participan los números del 1 al 500. Gana quien tenga un número múltiplo de 10 o uno múltiplo de 25. **¿Cuál es la probabilidad de ganar?**



ACTIVIDAD

Resuelva los siguientes problemas de probabilidad

- 1) Se lanza un dado, sabiendo que ya salió par, ¿cuál es la probabilidad que sea menor que 5?
- 2) Se lanzan dos dados, uno blanco y uno rojo. Calcular la probabilidad que la suma de los puntos
 - I. sea igual a 10.
 - II. sea igual a 10, si se sabe que en el dado rojo salió 6.
 - III. sea igual a 10, si se sabe que en el dado rojo salió 3.

3) Se ha realizado una encuesta sobre el fenómeno de la violencia en los medios de comunicación. A cada encuestado se le ha pedido que opine contestando Sí o No si existe violencia en los medios de comunicación. La información obtenida queda recogida en la siguiente **tabla de contingencia de frecuencias**.



	SI	NO	Ns/Nc	Total
Hombres	162	95	23	280
Mujeres	256	45	19	320
Total	418	140	42	600

Se extrae un encuestado al azar, calcule en cada caso la probabilidad de que:

- a) sea un hombre dado que dijo Sí
- b) haya dicho Sí dado que es hombre.

4) En una tómbola hay 6 bolitas numeradas del 1 al 6. Se saca una bolita al azar tres veces para formar un número de tres cifras. Calcule la probabilidad de obtener un número menor que 400 si la extracción se hace con restitución y, luego, sin restitución.



5) Un experimento aleatorio consiste en extraer tres cartas de un mazo de 52 cartas de naipe inglés (sin jockers), una a continuación de la otra y sin reposición (una vez que se saca la carta no se regresa al mazo). **¿Cuál es la probabilidad de extraer solo corazones?**

6) Hay 8 personas elegibles para elegir la directiva de curso. Anita desea ser la presidenta; Miguel, el tesorero y Constanza, la secretaria. Si los puestos se eligen por sorteo **¿Cuál es la probabilidad de que estos alumnos salgan elegidos en los cargos que desean?**

7) Según la información disponible, un cierto tipo de enfermo sometido a un trasplante tiene un 2% de probabilidad de sufrir una grave complicación por la anestesia; la probabilidad de que se produzcan complicaciones durante la operación es de un 9%; después de la operación, la probabilidad de complicación es de un 15%. Determina la probabilidad que un paciente sometido a trasplante, de acuerdo a esta información, no sufra ninguna complicación.



8) Se lanzan un dado y una moneda calcula la probabilidad de que salga:

- a) as al lanzar el dado y cara al lanzar la moneda.
- b) as al lanzar el dado, sabiendo que ya salió cara al lanzar la moneda.

9) Se extrae una carta de un mazo de un naipe inglés. **¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea roja?. ¿Cambia esta probabilidad si se sabe que la carta es un rey? ¿Qué se puede decir de los sucesos "es roja" y "es rey"?** Calcula la probabilidad de que la carta sea roja y rey considerando independencia de sucesos.

10) Se lanza un dado 6 veces, **¿cuál es la probabilidad de obtener solo ases?**

11) Se lanzan tres dados **¿cuál es la probabilidad de que la suma sea múltiplo de siete o de seis?**

12) Se extraen dos cartas de un mazo de 52 **¿cuál es la probabilidad de que sean negras o diamantes?**

13) Una caja contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se sacan tres bolas al azar, determine la probabilidad de que:

- a) todas sean del mismo color
- b) todas sean rojas o todas blancas.

14) **¿Cuál Es la probabilidad de que al lanzar un dado salga par o primo?**

15) Se lanzan dos dados **¿cuál es la probabilidad de que la suma sea múltiplo de 4 o 3?**

16) Lanza una moneda y un dado. **¿Cuál es la probabilidad de obtener "cara" o "cinco"; sello o distinto de 5?**

17) Una caja contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se sacan tres bolas al azar, determine la probabilidad de que al menos una sea de distinto color a las demás.

18) Se lanza un dado tres veces, **¿cuál es la probabilidad de que al menos una vez salga 5?**



EVALUACIÓN

1. Una moneda se lanza tres veces, **¿Cuál es la probabilidad de que las tres veces salga cara?**

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{16}$

2. En una urna hay 3 fichas amarillas y 6 azules, **¿Cuál es la probabilidad de que al sacar 2 fichas, con reposición, éstas sean amarillas?**

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{5}$ c) 1 d) $\frac{1}{9}$ e) $\frac{2}{3}$

3. Una persona muy distraída ha extraviado el número telefónico de su mejor amigo, pero logra averiguar las 5 cifras intermedias de un total de 7. Sabiendo además que el primer dígito debe ser par, distinto de 0 y que la última cifra es impar mayor que 4, **¿cuál es la probabilidad de acertar al número de teléfono de su amigo?**

- a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{2}{13}$ d) $\frac{1}{2}$ e) Ninguna de las anteriores

4. Si se lanzan 3 dados no cargados, **¿cuál es la probabilidad de obtener 5 en los tres lanzamientos?**

- a) $\frac{5}{36}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{216}$ d) $\frac{6}{216}$ e) Ninguna de las anteriores

5. Hacemos rodar un dado de seis caras; entonces la probabilidad del suceso "obtener 2" sabiendo que ha salido un número par es:

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{5}{6}$ e) Ninguna de las anteriores

6. En un curso de 40 alumnos, las notas de la asignatura de Lenguaje y Comunicación tienen la siguiente distribución:

NOTAS	Hasta 2,9	De 3,0 a 3,9	De 4,0 a 7,0
Cantidad de alumnos	12	8	20

Al elegir un alumno al azar, la probabilidad de que **no tenga** una nota inferior a 3,0 es de un:

- a) 30% b) 28% c) 70% d) 12% e) 40%

BIBLIOGRAFÍA:

Sitios WEB:

Probabilidades:

<http://www.profesorenlinea.cl/matematica/ProbabilidadCalculo.htm>

<http://www.sectormatematica.cl/psu/Psu%20Probabilidades.pdf>

http://amolasmates.es/pdf/ejercicios/3_ESO/Ejercicios%20de%20Probabilidad.pdf

http://dta.utralca.cl/estadistica/ejercicios/bases_teoricas/Probabilidades/ResueltoProbabilidades.pdf

<http://profesorenlinea.cl/matematica/ProbabilidadCalculo.htm>

Conceptos básicos de estadística:

<http://www.sectormatematica.cl/media/NM4/conceptos%20basicos%20estadistica.pdf>

Ejercicios resueltos de probabilidad y muestreo aleatorio con y sin reemplazo:

http://www.uv.es/montes/probabilitat/problemes_antics.pdf



Ministerio de
Educación

Gobierno de Chile